

COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

Il metodo del completamento del quadrato è una tecnica usata per risolvere le equazioni di secondo grado e si applica ai polinomi che non si possono scomporre con i metodi studiati.

Il completamento del quadrato consiste nello scrivere il polinomio

$$ax^2 + bx + c$$

nella forma

$$(Ax + B)^2 + C$$

PROCEDIMENTO: Posto $a = A = 1$ (l'equazione di secondo grado si può sempre dividere per $a \neq 0$), l'uguaglianza che deve essere soddisfatta è

$$x^2 + bx + c = (x + B)^2 + C$$

che, sviluppando il secondo membro, è equivalente a

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2Bx + (B^2 + C)$$

Perciò, uguagliando i coefficienti del termine di primo grado e i termini noti tra loro, si ottengono le relazioni:

$$b = 2B$$

$$c = B^2 + C$$

che, invertite, diventano:

$$B = \frac{b}{2}$$

$$C = c - B^2$$

ESEMPIO 1 - Applicare il metodo del completamento del quadrato per risolvere l'equazione $x^2 + 6x + 1 = 0$.

SOLUZIONE: Poiché $a = 1$, non occorre dividere per a .
Sostituendo i valori $b = 6$ e $c = 1$ nelle formule di B e C , si ottiene

$$B = 3$$

$$C = 1 - 3^2 = -8$$

L'uguaglianza

$$x^2 + 6x + 1 = (x + 3)^2 - 8$$

consente di risolvere l'equazione data nella forma:

$$(x + 3)^2 - 8 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 8$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{8}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{8}$$

ESERCIZI

1. Completare le seguenti uguaglianze:

a. $(x + 4)^2 =$

$$x^2 + 8x + 5 = (x + 4)^2 - \boxed{}$$

b. $(x - 2)^2 =$

$$x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + \boxed{}$$

c. $(x + 1)^2 =$

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + \boxed{}$$

d. $(x - 3)^2 =$

$$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + \boxed{}$$

2. Scrivere ciascuna delle seguenti espressioni nella forma $(x + B)^2 + C$:

a. $x^2 + 8x - 20 =$

b. $x^2 + 6x + 14 =$

c. $x^2 - 30x + 20 =$

d. $x^2 - x + 1 =$

3. Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado con il metodo del completamento del quadrato:

a. $x^2 + 4x - 6 = 0$

$$(x + 2)^2 - \boxed{} = 0$$

$$(x + 2)^2 = \boxed{}$$

$$x + 2 = \pm \sqrt{\boxed{}}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{\boxed{}}$$

b. $x^2 + 10x - 1 = 0$