

## FRAZIONI ALGEBRICHE

Alcune frazioni algebriche si possono semplificare dopo aver scomposto il numeratore e il denominatore in fattori irriducibili.

ESEMPIO 1 - Semplificare la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12}$$

SOLUZIONE - Il numeratore e il denominatore si possono scomporre con il metodo del numero guida:

$$\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12} = \frac{(x + 5)(x - 3)}{(x + 4)(x - 3)}$$

Il polinomio  $(x - 3)$  appare come fattore sia al numeratore che al denominatore quindi si può semplificare:

$$\frac{(x + 5)\cancel{(x - 3)}}{(x + 4)\cancel{(x - 3)}} = \frac{x + 5}{x + 4}$$

ESEMPIO 2 - Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{x}{x - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

SOLUZIONE: Prima si esegue la moltiplicazione

$$\frac{x}{x - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{x(x^2 - 1)}{x^3(x - 1)}$$

poi si scompone il binomio  $(x^2 - 1)$

$$\frac{x(x^2 - 1)}{x^3(x - 1)} = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x^3(x - 1)}$$

infine si effettua la semplificazione

$$\frac{x^1\cancel{(x - 1)}^1(x + 1)}{x^2\cancel{x}^1\cancel{(x - 1)}_1} = \frac{x + 1}{x^2}$$

ESEMPIO 3 - Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{x + 1}{x^2} : \frac{x^2 - 1}{x}$$

SOLUZIONE: Dopo aver trasformato la divisione in moltiplicazione si risolve come nell'esempio precedente:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2} : \frac{x^2-1}{x} &= \frac{x+1}{x^2} \times \frac{x^1}{x^2-1} \\ &= \frac{x+1}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{x+1}{x(x+1)_1(x-1)} \\ &= \frac{1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

ESEMPIO 4 - Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x+1}$$

SOLUZIONE: Prima si eseguono le somme riducendo le frazioni al loro minimo comune denominatore, in questo caso  $(x+2)(x+1)$ :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x+1} &= \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+1)} + \frac{2x(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x^2+x+2x^2+4x}{(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{3x^2+5x}{(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{x(3x+5)}{(x+2)(x+1)}\end{aligned}$$

non è possibile semplificare ulteriormente.

### ESERCIZI

1. Semplificare ciascuna delle seguenti espressioni:

(a) $\frac{x^6}{x^4}$	(b) $\frac{x(x+2)}{x^2(x-2)}$	(c) $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$
(d) $\frac{(x-4)(2x-1)}{x(x-4)(x+1)}$	(e) $\frac{x^3(x-6)}{x(x+6)}$	(f) $\frac{x(x-2)(x+3)}{x^2(x-2)(x+3)}$
(g) $\frac{(2x+1)(5x-3)}{x(2x+1)}$	(h) $\frac{(2x+1)(x-2)(x+7)}{x(x+7)(x-2)}$	
(i) $\frac{(x+1)(x-3)(x+4)}{(x+4)(x+2)(x+1)}$		

2. Dopo aver scomposto numeratore e denominatore, semplificare ciascuna delle seguenti espressioni:

(a) $\frac{x^2+x}{x^3+x^2}$	(b) $\frac{x^2+2x}{x+2}$	(c) $\frac{4x^2+6x}{2x+3}$
(d) $\frac{x^4+5x^2}{x(x+5)}$	(e) $\frac{x^3-x^2}{x}$	(f) $\frac{x^6-x^3}{x(x-1)}$
(g) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$	(h) $\frac{x^3-4x}{x^2-3x-4}$	(i) $\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}$

(j) $\frac{x^3 - 16x}{x^2 - 6x + 8}$	(k) $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - x - 6}$	(l) $\frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - 3x - 4}$
(m) $\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - x^3 - 6x^2}$	(n) $\frac{x^3 - x}{x^2 + 9x + 8}$	(o) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^3 + 4x^2 - 12x}$
(p) $\frac{10x^2 - 27x + 18}{2x^2 - x - 3}$	(q) $\frac{5x^2 + 23x - 10}{x^2 - 2x - 35}$	(r) $\frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$
(s) $\frac{2x^2 + 3x - 35}{3x^2 + 17x + 10}$	(t) $\frac{12x^2 - 5x - 3}{15x^2 + 2x - 1}$	(u) $\frac{9x^3 - 4x}{12x^2 + x - 6}$

3. Dopo aver eseguito le somme algebriche indicate, semplificare ciascuna delle seguenti espressioni:

(a) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-5}$	(b) $\frac{4}{x+2} - \frac{5}{x-1}$	(c) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$
(d) $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x+2}$	(e) $\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}$	(f) $\frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-6}$
(g) $\frac{x}{x-4} + \frac{x}{x+2}$	(h) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x+1}$	(i) $\frac{x}{x-6} + \frac{4}{2x-1}$
(j) $\frac{3x}{x+2} + \frac{2x}{x-6}$	(k) $\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}$	(l) $\frac{x+1}{x^2} + \frac{x+7}{x}$
(m) $\frac{3x}{x+6} + \frac{2x}{x+7}$	(n) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+7}{x+3}$	(o) $\frac{x-3}{x+2} + \frac{x-7}{x+1}$

4. Dopo aver eseguito le divisioni e le moltiplicazioni indicate, semplificare ciascuna delle seguenti espressioni:

(a) $\frac{x+1}{x+4} \times \frac{x}{x+1}$	(b) $\frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x^2-1}{x}$
(c) $\frac{x^2+5x+6}{x} \times \frac{x+2}{x+3}$	(d) $\frac{3x}{x^2-4} \times \frac{x-2}{x^3}$
(e) $\frac{x+3}{x} : \frac{x^2}{x+3}$	(f) $\frac{(x+3)^2}{x} : \frac{x+3}{x^2}$
(g) $\frac{x^3}{x+6} : \frac{x^2+x}{x^2+5x-6}$	(h) $\frac{x^3-x}{x+4} : \frac{x^2+3x-4}{x^2}$
(i) $\frac{x^2+5x+6}{x-4} : \frac{x^2-2x-8}{x+3}$	