NOMI .... DATA .... CLASSE ....

SCOMPOSIZIONE CON IL METODO DI RUFFINI

Teorema 1 (del Resto). *Il resto R della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $(x-a)$ è: $R = P(a)$.*

Esempio 1. *Calcolare il resto della divisione $\left(x^3 - 5x^2 + 7x - 2\right) : (x+7)$.*
Dato che $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ è il dividendo e $a = -7$ è il termine noto del divisore cambiato di segno, il resto si ottiene sostituendo -7 al posto della x:

$$R = P(-7) = (-7)^3 - 5(-7)^2 + 7(-7) - 2 = -639$$

Esercizio 1. *Calcolare il resto delle seguenti divisioni, applicando il teorema del resto:*

a. $\left(2x^3 - 9x + 1\right) : (x-3)$

b. $\left(2x^3 - \frac{11}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{3}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

c. $\left(-x^3 + 2x^2 - 2\right) : (x+2)$

d. $\left(x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - y^3\right) : (x+3y)$

Definizione 1. *Un polinomio P si dice divisibile per un altro polinomio S se il resto della divisione $P : S$ è uguale a zero.*

Esempio 2. *Stabilire se il polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$ è divisibile per i binomi $(x-2)$, $(x+3)$ e $(x-1)$. Applicando il teorema del resto si ha:*

- $a = 2$, $P(2) = 2(2)^2 + 5(2) - 3 = 15$ *quindi* $P(x)$ *non è divisibile per* $(x-2)$*;*
- $a = -3$, $P(-3) = 2(-3)^2 + 5(-3) - 3 = 0$ *quindi* $P(x)$ *è divisibile per* $(x+3)$*;*
- $a = 1$, $P(1) = 2(1)^2 + 5(1) - 3 = 4$ *quindi* $P(x)$ *non è divisibile per* $(x-1)$*.*

Esercizio 2. *Stabilire se i seguenti polinomi sono divisibili per i binomi a fianco indicati:*

a.	$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	*per*	$x+1$	$x-1$	$x+2$	$x-3$
b.	$P(x) = x^3 - 2x^2y - 5xy^2 + 6y^3$	*per*	$x+y$	$x-y$	$x+2y$	$x-3y$

Definizione 2. *Un numero z si dice zero o radice di un polinomio $P(x)$ se $P(z)$ è uguale a zero.*

Esempio 3. *Stabilire se i valori 2, -3 e 1 sono zeri del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Calcolando il valore del polinomio si ha:*

- $P(2) = 2(2)^2 + 5(2) - 3 = 15$ *quindi* 2 *non è uno zero del polinomio;*
- $P(-3) = 2(-3)^2 + 5(-3) - 3 = 0$ *quindi* -3 *è uno zero del polinomio;*
- $P(1) = 2(1)^2 + 5(1) - 3 = 4$ *quindi* 1 *non è uno zero del polinomio.*

Esercizio 3. *Stabilire se i seguenti polinomi hanno come zeri i valori a fianco indicati:*

a.	$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	*per*	-1	1	-2	3
b.	$P(x) = x^3 - 2x^2y - 5xy^2 + 6y^3$	*per*	$-y$	y	$-2y$	$3y$

Osservazione 1. *Se il valore z è uno zero del polinomio $P(x)$ allora il resto R della divisione $P(x) : (x - z)$ è zero, perciò il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x - z)$ e si può scomporre nella forma $P(x) = (x - z) \times Q(x)$ dove $Q(x)$ è il quoziente.*

Esempio 4. *Il polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$ dell'esempio precedente ha come zero il valore $z = -3$, quindi, applicando la regola di Ruffini con divisore $x + 3$:*

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & 5 & -3 \\ & & & \\ -3 & & -6 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

si ottiene $Q(x) = 2x - 1$ e la scomposizione $P(x) = (x + 3)(2x - 1)$.

Esercizio 4. *Scomporre i polinomi dell'esercizio precedente dividendoli per $x - z$ dove z è il valore che è stato individuato come zero del polinomio.*

Teorema 2 (di Ruffini)**.** *Gli zeri interi di un polinomio P sono divisori del termine noto.*

Esempio 5. *Dato il polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$, il termine noto è -3 e i suoi divisori sono $D(-3) = \{\pm 1, \pm 3\}$. Per individuare gli zeri interi di $P(x)$ occorre calcolare il valore del polinomio per ciascun divisore:*

$$\begin{array}{lclcl} P(1) & = & 2(1)^3 - 3(1)^2 - 8(1) - 3 & = & -12 \\ P(-1) & = & 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 8(-1) - 3 & = & 0 \\ P(3) & = & 2(3)^3 - 3(3)^2 - 8(3) - 3 & = & 0 \\ P(-3) & = & 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 8(-3) - 3 & = & -60 \end{array}$$

Gli zeri interi di $P(x)$ sono -1 e 3.

Esercizio 5. *Trovare gli zeri interi z dei seguenti polinomi e scomporli nella forma*

$$P(x) = (x - z) \times Q(x)$$

a. $x^3 - x^2 - x - 2$ *b.* $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3$

Teorema 3 (di Ruffini)**.** *Gli zeri razionali di un polinomio P sono i quozienti ottenuti tra i divisori del termine noto e i divisori del termine di grado massimo.*

Esempio 6. *Dopo aver trovato gli zeri razionali di $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, scomporre il polinomio.*
I divisori del termine di grado massimo sono $D(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$, il termine noto è 1 e i suoi divisori sono $D(1) = \{\pm 1\}$ quindi gli zeri razionali di $P(x)$ si devono cercare nell'insieme $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$.

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{array}{lclcl} P(1) & = & 2(1)^3 + (1)^2 + 2(1) + 1 & = & 6 \\ P(-1) & = & 2(-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1) + 1 & = & -2 \\ P\left(\frac{1}{2}\right) & = & 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 & = & \frac{5}{2} \\ P\left(-\frac{1}{2}\right) & = & 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 & = & 0 \end{array}$$

perciò $-\frac{1}{2}$ *è uno zero razionale di* $P(x)$.
Per scomporre il polinomio si divide per il binomio $x + \frac{1}{2}$*:*

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & \\ -\frac{1}{2} & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

quindi la scomposizione è $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2\right)$.

Esercizio 6. *Trovare gli zeri razionali z dei seguenti polinomi e scomporli applicando la regola di Ruffini:*

a. $2x^3 + x^2 + x - 1$

b. $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

Esempio 7. *Dato il polinomio* $P(x) = x^3 + kx^2 - 3x - 4$ *trovare il valore di* k *tale che la divisone* $P(x) : (x - 4)$ *dia resto* $R = 0$.
Si calcola il resto sostituendo 4 *al posto della* x *nel polinomio:*

$$R = (4)^3 + k(4)^2 - 3(4) - 4 = 48 + 16k$$

poiché il resto deve essere zero si pone $48 + 16k = 0$ *e si trova* $k = -3$.

Esercizio 7. *Trovare i valori di* k *che rendono i seguenti polinomi divisibili per i binomi a fianco indicati:*

a. $x^3 + kx^2 + x + 3$	$x + 3$
b. $x^3 + kx^2 + 6x + 5$	$x + 5$