RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE DI FUNZIONI

In questa scheda saranno trattate le relazioni di proporzionalità quadratica e cubica e le loro rappresentazioni grafiche.
ESEMPIO 1 - Una società produce cioccolatini a forma di pallone da calcio, il costo di ciascun cioccolatino è proporzionale al quadrato del raggio. Un cioccolatino di raggio $3cm$ costa €4. Calcolare il costo di un cioccolatino di raggio $1,2cm$ e il raggio di un cioccolatino che costi €8.

SOLUZIONE:
Sia C il costo e r il raggio. Poiché il costo è proporzionale al quadrato del raggio $C \propto r^2$, si tratta di trovare la costante k di proporzionalità: $C = kr^2$. Sostituendo i dati del problema $C = 4$ e $r = 3$ nella relazione di proporzionalità, si ottiene $4 = k \times 3^2$ ovvero $k = \frac{4}{9}$. La formula del costo è allora $C = \frac{4}{9}r^2$ e sostituendo il raggio $r = 1,2cm$, si ha $C = \frac{4}{9} \times 1,2^2 =$ €0,64.
Per risolvere il secondo quesito si sostituisce il costo $C =$ €8 nella formula, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
8 &= \frac{4}{9} \times r^2 \\
r^2 &= \frac{9 \times 8}{4} \\
r^2 &= 18 \\
r &= \sqrt{18} = 4,24cm
\end{aligned}
$$

ESEMPIO 2 - La forza esercitata su una sfera metallica da un magnete è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra di essi. Quando la distanza è $20m$ la forza esercitata dal magnete è $0,5N$.

a. Esprimere la forza F esercitata dal magnete in funzione della distanza x tra il magnete e la sfera.

b. Calcolare la forza quando il magnete è a $10m$ dalla sfera.

c. Quanto dista il magnete dalla sfera quando la forza è $F = 20N$?

SOLUZIONE:

a. La forza F è inversamente proporzionale al quadrato della distanza $F \propto \frac{1}{x^2}$ quindi se k è la costante di proporzionalità la legge è $F = \frac{k}{x^2}$, sostituendo i dati del problema $F = \frac{1}{2}N$ e $x = 20m$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{k}{20^2} \\
k &= \frac{20^2}{2} = 200 \qquad \text{da cui} \\
F &= \frac{200}{x^2}
\end{aligned}
$$

b. Quando $x = 10m$ si ha $F = \frac{200}{10^2}N = 2N$.

c. Se $F = 20N$, sostituendo nella formula, si ha:

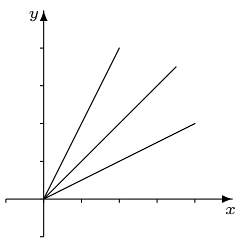
$$20 = \frac{200}{x^2}$$
$$x^2 = \frac{200}{20} = 10$$
$$x = \sqrt{10} = 3,16m$$

ESEMPIO 3 - Rappresentare nel piano cartesiano cartesiano il grafico delle seguenti relazioni di proporzionalità:

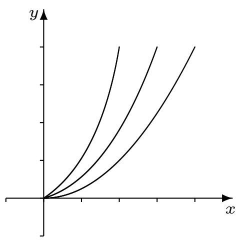
a. diretta b. quadratica c. inversa

SOLUZIONE:

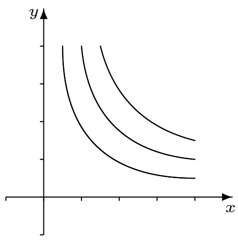
a. La proporzionalità diretta tra x e y è espressa dalla legge $y = kx$, ovvero dall'equazione di una retta che passa per l'origine. Maggiore è il valore di k, più è inclinata la retta rispetto all'asse x. La figura seguente mostra il grafico di $y = kx$ per tre possibili valori di k.



b. La proporzionalità quadratica tra x e y è espressa dalla legge $y = kx^2$. Nella figura seguente più è ripido il grafico della funzione e maggiore è il valore di k.



c. La proporzionalità inversa tra x e y è espressa dalla legge $y = \frac{k}{x}$. La figura seguente mostra il grafico per tre possibili valori di k, più è piccolo il valore di k e più il grafico della funzione si avvicina agli assi.



ESERCIZI

1. Scrivere la relazione esistente tra ciascuna coppia di variabili usando i dati forniti per trovare la costante di proporzionalità:

   a. T è direttamente proporzionale a x, quando $x = 3$ si ha $T = 120$.
   b. P è proporzionale al quadrato di ν, quando $\nu = 2$ si ha $P = 160$.

c. R è inversamente proporzionale al cubo di x, quando $x = 3$ si ha $R = 8$.

d. Y è inversamente proporzionale a x, quando $x = 3$ si ha $Y = 24$.

e. V è inversamente proporzionale al quadrato di x, quando $x = 5$ si ha $V = 100$.

2. Esprimere a parole ciascuna delle seguenti relazioni:

a. $y \propto \frac{1}{x^5}$	b. $y \propto x^2$	c. $y \propto \frac{1}{x^2}$
d. $y \propto x$	e. $y \propto x^3$	f. $y \propto \frac{1}{x}$

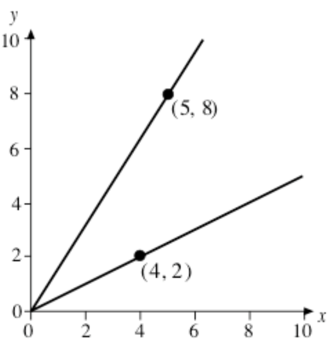
3. Se y è proporzionale al cubo di x, e $y = 12$ quando $x = 2$, calcolare:

a. y quando $x = 8$ b. x quando $y = 96$

4. Il volume del cubo è proporzionale al cubo del lato. Qual è la costante di proporzionalità?

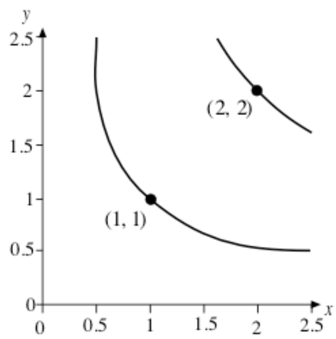
5. Trovare il valore di k delle relazioni riportate sotto ciascuno dei seguenti grafici:

a.



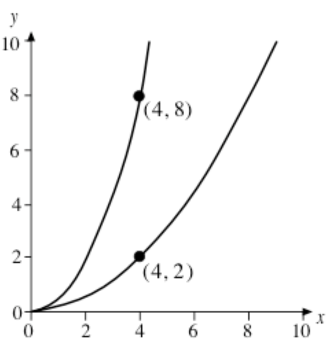
$$y = kx$$

b.



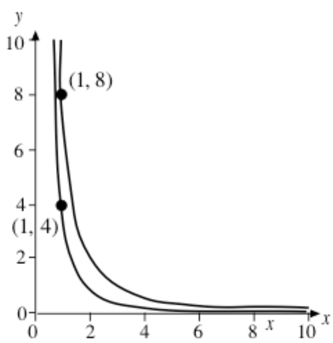
$$y = \frac{k}{x}$$

c.



$$y = kx^2$$

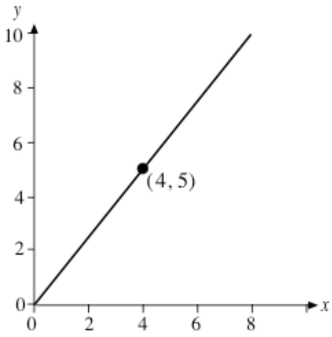
d.



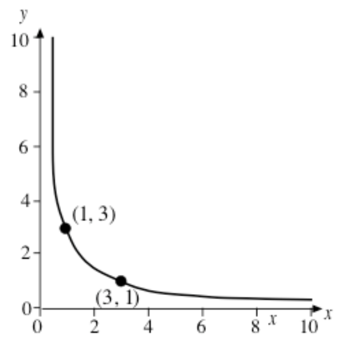
$$y = \frac{k}{x^2}$$

6. I grafici delle seguenti figure rappresentano le relazioni $y \propto x^n$ per $n = 1, 2, -1, -2$. Stabilire per ciascuna figura, utilizzando le informazioni fornite dai grafici, qual è la relazione tra y e x.

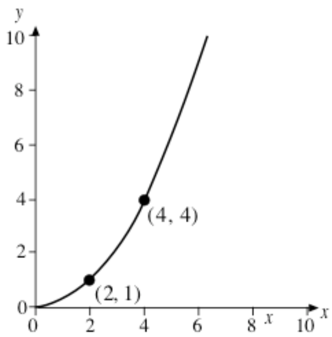
a.



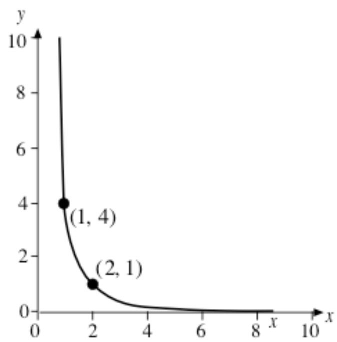
b.



c.



d.



7. Se y è inversamente proporzionale a x e z è proporzionale a y^2, Qual è la relazione tra z e x? Calcolare la costante di proporzionalità se $y = 2$ quando $x = 4$ e $z = 9$ quando $y = 2$.

8. L'illuminamento della luce di un proiettore su uno schermo è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra il proiettore e lo schermo.

   a. Se si raddoppia la distanza del proiettore quale sarà l'effetto di illuminamento sullo schermo?

   b. Come deve essere modificata la distanza tra il proiettore e lo schermo per raddoppiare l'illuminamento?