ANGOLI MAGGIORI DELL'ANGOLO RETTO

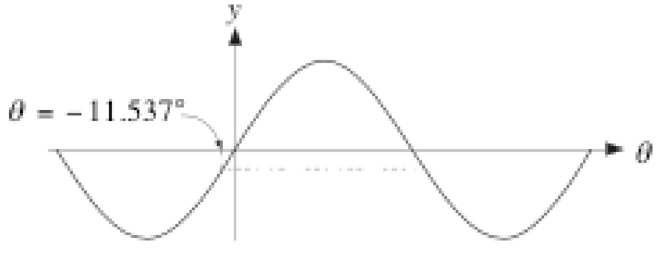
Le equazioni trigonometriche $\sin\theta = a$, $\cos\theta = b$ e $\tan\theta = c$ possono avere tante soluzioni.
I tasti delle funzioni inverse nelle calcolatrici ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$), danno come risultato i valori principali delle soluzioni.
Per $\sin\theta = a$ e $\tan\theta = c$, i valori principali sono compresi nell'intervallo: $-90° < \theta \leq 90°$.
Per $\cos\theta = b$, il valore principale della soluzione appartiene all'intervallo $0° \leq \theta < 180°$.

ESEMPIO 1 - Utilizzare la calcolatrice per risolvere l'equazione $\sin\theta = -0,2$.
Rappresentare la soluzione sul grafico della funzione seno e individuare il valore principale della soluzione.

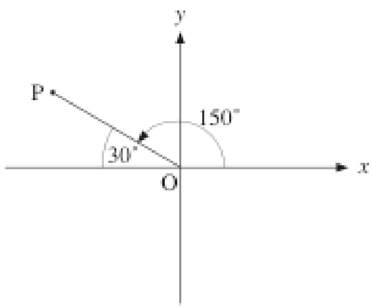
SOLUZIONE: Con il tasto $\sin^{-1}$ della calcolatrice, si ottiene

$$\theta = \sin^{-1}(-0,2) = -11,537°$$

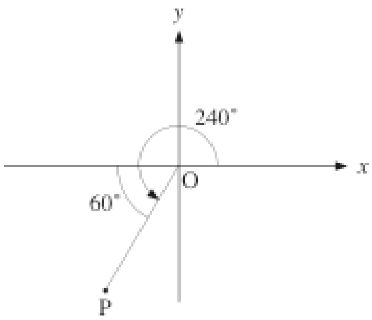
Il grafico di $\sin\theta$ mostra che il valore principale della soluzione è $-11,537°$:



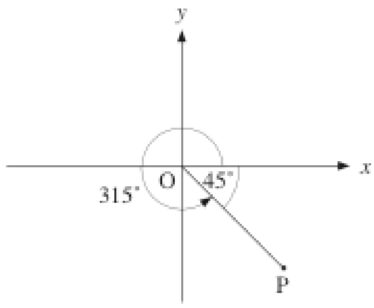
ESEMPIO 2 - Calcolare $\cos 150°$, $\sin 240°$, $\cos 315°$ e $\sin 270°$.



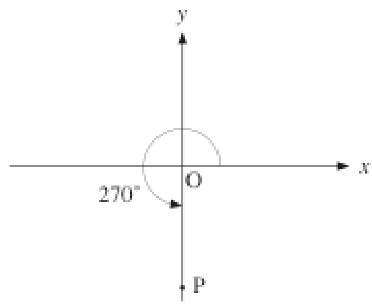
SOLUZIONE: Il punto P corrispondente all'angolo di $150°$ si trova nel secondo quadrante. Le coordinate di P sono $(-\cos 30°, \sin 30°)$. Dunque $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Il punto P corrispondente all'angolo di $240°$ si trova nel terzo quadrante. Le coordinate di P sono $(-\cos 60°, -\sin 60°)$. Dunque $\sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

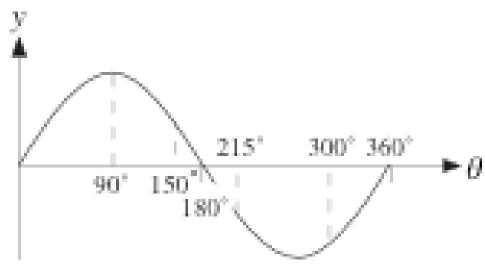


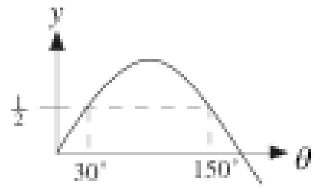
Il punto P corrispondente all'angolo di $315°$ si trova nel quarto quadrante. Le coordinate di P sono $(\cos 45°, -\sin 45°)$. Dunque $\cos 315° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Il punto P corrispondente all'angolo di $270°$ si trova si trova sull'asse y. Le coordinate di P sono $(0, -1)$. Dunque $\sin 270° = -1$.

ESEMPIO 3 - Tracciare il grafico di $\sin\theta$ per $0° \leq \theta \leq 360°$. al grafico dedurre i valori di $\sin 150°$, $\sin 215°$ e $\sin 300°$.





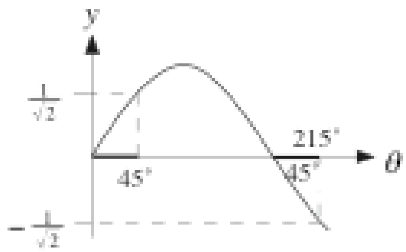
SOLUZIONE: Il grafico di $\sin\theta$ è rappresentato nella figura a fianco.
Dalla simmetria della curva si deduce che:

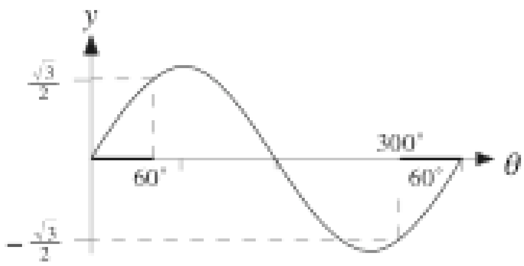
$$\sin 50° = \sin 30° \qquad = \frac{1}{2}$$

$$\sin 180° = 0$$

$$\sin 215° = -\sin 45° \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

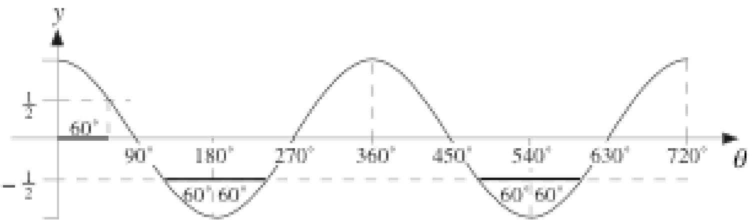
$$\sin 300° = -\sin 60° \qquad = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$





ESEMPIO 4 - Se $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, quali valori dell'angolo sono soluzione nell'intevallo $0° \leq \theta \leq 720°$?

SOLUZIONE: Il grafico di $\cos\theta$ mostra che ci sono quattro possibili valori per θ.



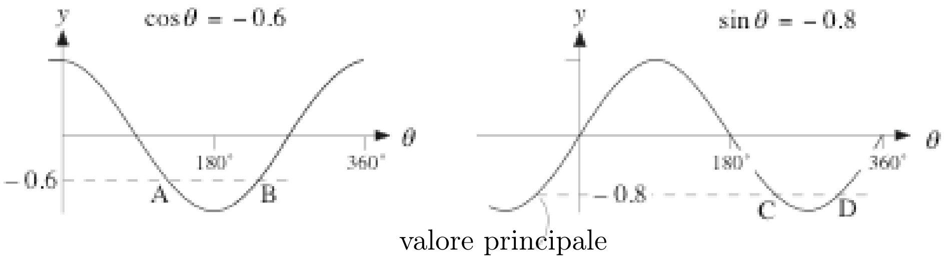
Osservando le simmetrie nel grafico, si deduce che i valori di θ sono:

$$\theta = 120°, \, 240°, \, 480°, \, 600°.$$

La soluzione nell'intervallo $0° \leq \theta < 180°$, $\theta = 120°$ è il valore principale.

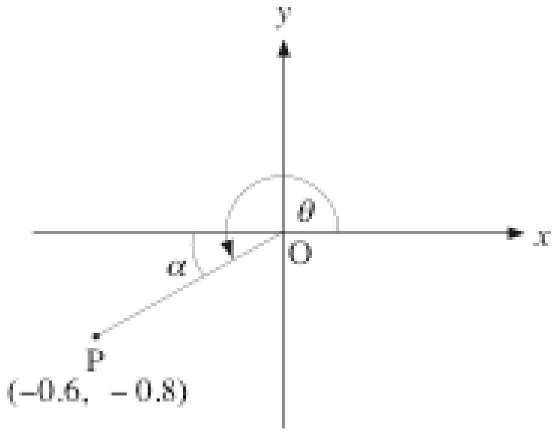
ESEMPIO 5 - Un angolo θ è tale che $\cos\theta = -0,6$, $\sin\theta = -0,8$ e $0° \leq \theta \leq 360°$. Dopo aver stabilito in quale quadrante si trova l'angolo, usare la calcolatrice per calcolare il calore di θ.

SOLUZIONE: I grafici seguenti mostrano le possibili soluzioni per θ compreso tra 0° e 360°.



Dai grafici si deduce che il valore di θ per il quale $\cos\theta = -0,6$ e $\sin\theta = -0,8$ deve trovarsi nell'intervallo dei valori compresi tra 180° e 270° cioè nel punto B della curva del coseno e nel punto C della curva del seno.

Dalla figura a fianco è possibile osservare che il punto $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ si trova nel terzo quadrante perciò l'angolo deve appartenere all'intervallo $180° \leq \theta \leq 270°$.



Utilizzando la calcolatrice è possibile calcolare il valore principale dell'angolo

$$\theta = \cos^{-1}(-0,6) = 126,87°$$

$$\theta = \sin^{-1}(-0,8) = -53,13°$$

quindi dal grafico del seno si deduce

$$\begin{aligned}\theta &= 180° + 53,13° \\ &= 233,13°\end{aligned}$$

Utilizzando le coordinate di P sulla circonferenza goniometrica si calcola

$$\tan\alpha = \frac{0,6}{0,8} = 0,75 \qquad \text{e} \qquad \alpha = \tan^{-1} 0,75 = 53,13°$$

Dunque $\theta = 180° + 53,13° = 233,13°$.

ESERCIZI

1. Rappresentare il grafico di $y = \sin\theta$ per $-360° \leq \theta \leq 720°$. Quante soluzioni ha in questo intervallo l'equazione $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$? Qual è il valore principale?

2. Rappresentare il grafico di $y = \cos\theta$ per $-360° \leq \theta \leq 720°$. Quante soluzioni ha in questo intervallo l'equazione $\cos\theta = \frac{1}{2}$? Qual è il valore principale?

3. Usando la calcolatrice e il grafico delle funzioni trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:

(a) $\sin\theta = 0.7$	(b) $\sin\theta = -0.4$	(c) $\sin\theta = -1$
(d) $\cos\theta = 0.6$	(e) $\cos\theta = -0.4$	(f) $\cos\theta = -1$

4. Usare la calcolatrice e il grafico di $y = \tan\theta$ per risolvere le seguenti equazioni nell'intervallo $0° \leq \theta \leq 720°$:

   (a) $\tan\theta = 0.25$ (b) $\tan\theta = 1$ (c) $\tan\theta = -0.5$

5. In ciascuno dei seguenti casi trovare il valore di θ compreso tra 0° e 360° che soddisfa entrambe le equazioni:

   (a) $\cos\theta = 0,6$ e $\sin\theta = 0,8$
   (b) $\cos\theta = -0,8$ e $\sin\theta = 0,6$
   (c) $\sin\theta = -0,6428$ e $\cos\theta = -0,7660$
   (d) $\sin\theta = -1$ e $\cos\theta = 0$

6. Usare Geogebra per risolvere i seguenti esercizi.

   (a) Disegnare il grafico della funzione $y = \sin 2x$ per valori di x compresi tra $-360°$ e $360°$.
   (b) Confrontare il grafico precedente con il grafico di $y = \sin x$. Qual è il periodo della funzione $y = \sin 2x$?
   (c) Ripetere i punti (a) e (b) per le funzioni $y = \sin 3x$ e $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.
   (d) Disegnare il grafico della funzione $y = 2\sin x$ per valori di x compresi tra $-360°$ e $360°$. Qual è la relazione tra i grafici di $y = 2\sin x$ e $y = \sin x$?
   (e) Ripetere il punto (e) per le funzioni $y = 3\sin x$ e $y = \frac{1}{2}\sin x$.
   (f) Disegnare il grafico delle funzioni $y = 1 + \cos x$, $y = 3 + \cos x$ e $y = \cos x - 2$. Qual è la relazione tra questi grafici e il grafico di $y = \cos x$?