FORMULA RISOLUTIVA DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

La formula

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

consente di calcolare le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

DIMOSTRAZIONE - Si divide l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ per $a \neq 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

si trasporta il termine noto al secondo membro

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

si completa il quadrato sommando a entrambi i membri il termine $\frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

si scompone il primo membro e si riduce allo stesso denominatore il secondo membro

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

si pone il disriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ nella formula

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

si calcola la radice quadrata di entrambi i membri

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

infine si osserva:

- se $\Delta < 0$ l'equazione è impossibile
- se $\Delta = 0$ l'equazione ha due soluzioni coincidenti $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
- se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni distinte $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ESEMPIO 1 - Risolvere l'equazione $x^2 + 6x - 8 = 0$.

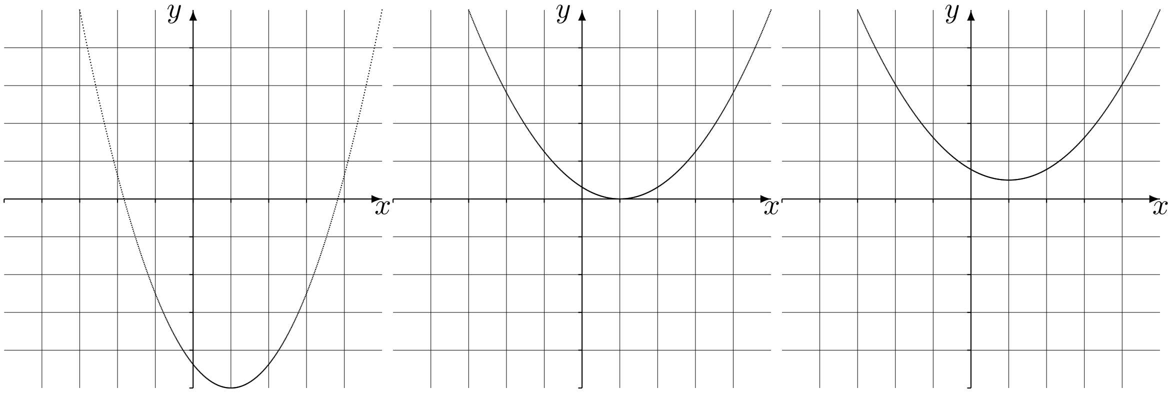
SOLUZIONE: Sostituendo i coefficienti $a = 1$, $b = 6$ e $c = -8$, si calcola

$$\Delta = (+6)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (-8) = +68$$

essendo $\Delta > 0$, si calcolano le due soluzioni approssimate alla seconda cifra decimale:

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{68}}{2} = -7,12 \qquad\qquad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{68}}{2} = 1,12$$

I seguenti grafici rappresentano i polinomi i cui zeri sono le soluzioni delle corrispondenti equazioni di secondo grado.
Il numero delle soluzioni dipende dal segno del discriminante Δ:



Due soluzioni ($\Delta > 0$) — Una soluzione ($\Delta = 0$) — Nessuna soluzione ($\Delta < 0$)

ESERCIZI

1. Una macchina produce biglietti per i mezzi di trasporto di lunghezza $2cm$ maggiore della larghezza.

   a. Se x è la larghezza esprimere l'area del biglietto in funzione di x.

   b. Calcolare la larghezza e la lunghezza di un biglietto di area $10cm^2$.

2. L'altezza h raggiunta da una pietra lanciata con una catapulta è:

$$h = 20t - 9,8t^2$$

   dove t è il tempo trascorso dopo il momento del lancio.

   a. Calcolare il momento in cui la pietra cade a terra.

   b. Calcolare per quanto tempo la pietra si muove al di sopra di $5m$.

   c. Indicata con M l'altezza massima raggiunta dalla pietra, trovare l'equazione di secondo grado che permette di calcolare il valore di M, spiegare perché tale equazione ha un'unica soluzione e calcolare l'approssimazione della radice alla seconda cifra decimale.

3. La seguente equazione serve per calcolare l'estensione massima x, prima di rompersi, di una corda elastica che sostiene una massa m:

$$mgx + mgl - \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

   con

   - m = massa (kg)
   - l = lunghezza ($10m$)
   - k = costante ($120Nm^{-1}$)
   - g = accelerazione di gravità $10ms^{-2}$

   Calcolare:

   a. l'estensione x per una massa di $60kg$;

   b. quanto aumenterebbe l'estensione se la massa fosse $70kg$.

SOLUZIONI

1. a. Area $= x(x+2)$

   b. Il biglietto è largo $2,32cm$ e lungo $4,32cm$ con l'approssimazione alla seconda cifra decimale.

2. a. La pietra cade a terra dopo $2,04$ secondi

   b. $1,46$ secondi

   c. $m = 20t - 9,8t^2$. La massima altezza, raggiunta al tempo $t = 1,02s$, è $10,20m$

3. a. $16,18m$

   b. La corda si estende fino a $18,11m$, con un incremento di $1,93m$.