DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Diana Giacobbi
diana.giacobbi@liceotalete.it

4 giugno 2020

DEFINIZIONI

Premessa

Ogni disequazione si può esprimere in forma implicita portando tutti i termini diversi da zero al primo membro.

DEFINIZIONE

Le disequazioni di secondo grado in forma normale con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ sono:

1. $ax^2 + bx + c > 0$
2. $ax^2 + bx + c < 0$
3. $ax^2 + bx + c \geq 0$
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$

RISOLUZIONE

Premessa

Nel seguito suppongo $a > 0$. Se fosse $a < 0$, moltiplicando tutto per -1 e invertendo il verso, si può sempre ottenere una disequazione equivalente con $a > 0$.

studio del segno

Per la risoluzione di ogni disequazione di secondo grado occorre eseguire lo studio del segno del polinomio $ax^2 + bx + c$. Per fare questo si distinguono tre casi.

RISOLUZIONE

1° caso $\Delta > 0$

Essendo $\Delta > 0$ il polinomio si scompone

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

studio del segno

Supposto $x_1 < x_2$, lo studio del segno è rappresentato come segue

caso $\Delta > 0$		x_1		x_2	
$a > 0$	$+$		$+$		$+$
$x - x_1$	$-$		$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$		$+$
$a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

RISOLUZIONE

2° caso $\Delta = 0$

Essendo $\Delta = 0$ e $x_1 = x_2$, il polinomio si scompone

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)^2$$

studio del segno

Il polinomio, essendo il prodotto di un fattore positivo a e uno non negativo (il quadrato di binomio), risulta sempre positivo eccetto per $x = x_1$ dove è zero.

RISOLUZIONE

3° caso $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ il polinomio è irriducibile ed è sempre positivo.

DIMOSTRAZIONE del 3° caso

passaggi

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)= \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)= \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]= \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

DIMOSTRAZIONE del 3° caso

spiegazione dei passaggi

1. Raccoglimento a fattore comune del coefficiente a
2. Completamento del quadrato sommando e sottraendo il termine $\frac{b^2}{4a^2}$
3. Scomposizone del quadrato del binomio e riduzione allo stesso denominatore dei rimanenti termini
4. Sostituzione del Δ al numeratore del secondo termine
5. Il prodotto di a per la somma di due termini positivi è sempre positivo

ESEMPI

Caso $\Delta > 0$

Dato il polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

1. Scompongo il polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$;
2. Rappresento lo studio del segno

caso $\Delta > 0$		-3		$\frac{1}{2}$	
$a = 2 > 0$	$+$		$+$		$+$
$x - \frac{1}{2} > 0$	$-$		$-$		$+$
$x + 3 > 0$	$-$		$+$		$+$
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3. Risolvo le disequazioni
   - $P(x) > 0$ soluzione $x < -3 \vee x > \frac{1}{2}$
   - $P(x) \geq 0$ soluzione $x \leq -3 \vee x \geq \frac{1}{2}$
   - $P(x) < 0$ soluzione $-3 < x < \frac{1}{2}$
   - $P(x) \leq 0$ soluzione $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$

ESEMPI

Caso $\Delta = 0$

Dato il polinomio $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

1. Scompongo il polinomio $P(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$;
2. Il polinomio $P(x)$, essendo il quadrato di un binomio, è sempre positivo o nullo.
3. Risolvo le disequazioni
   - $P(x) > 0$ soluzione $\forall x \neq \frac{1}{2}$
   - $P(x) \geq 0$ soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$
   - $P(x) < 0$ soluzione $\nexists x \in \mathbb{R}$
   - $P(x) \leq 0$ soluzione $x = \frac{1}{2}$

ESEMPI

Caso $\Delta < 0$

Dato il polinomio $P(x) = 4x^2 - 4x + 2$.

1. Il polinomio $P(x) = 4x^2 - 4x + 2 =$ è irriducibile;
2. Il polinomio $P(x)$, è sempre positivo.
3. Risolvo le disequazioni
   - $P(x) > 0$ soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$
   - $P(x) \geq 0$ soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$
   - $P(x) < 0$ soluzione $\nexists x \in \mathbb{R}$
   - $P(x) \leq 0$ soluzione $\nexists x \in \mathbb{R}$

CONCLUSIONE

SCHEMA RISOLUTIVO $a > 0$

Dato il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Le soluzioni delle disequazioni sono riportate nel seguente schema.

Caso $a > 0$ con $x_1 < x_2$

$P(x) = ax^2 + b + c$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$P(x) > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \neq x_{1,2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) \geq 0$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0$	$x_1 < x < x_2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) \leq 0$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x = x_{1,2}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

CONCLUSIONE

SCHEMA RISOLUTIVO $a < 0$

Dato il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Le soluzioni delle disequazioni sono riportate nel seguente schema.

Caso $a < 0$ con $x_1 < x_2$

$P(x) = ax^2 + b + c$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$P(x) > 0$	$x_1 < x < x_2$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) \geq 0$	$x_1 \leq x \leq x_2$	$x = x_{1,2}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$P(x) < 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \neq x_{1,2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$P(x) \leq 0$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$

REGOLA

CASO $\Delta < 0$

Il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ e il suo primo coefficiente a sono sempre concordi.

CASO $\Delta = 0$

Il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ e il suo primo coefficiente a sono sempre concordi eccetto per $x = x_{1,2}$.

CASO $\Delta > 0$

Il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ e il suo primo coefficiente a sono concordi per valori estermi all'intervallo delle radici.