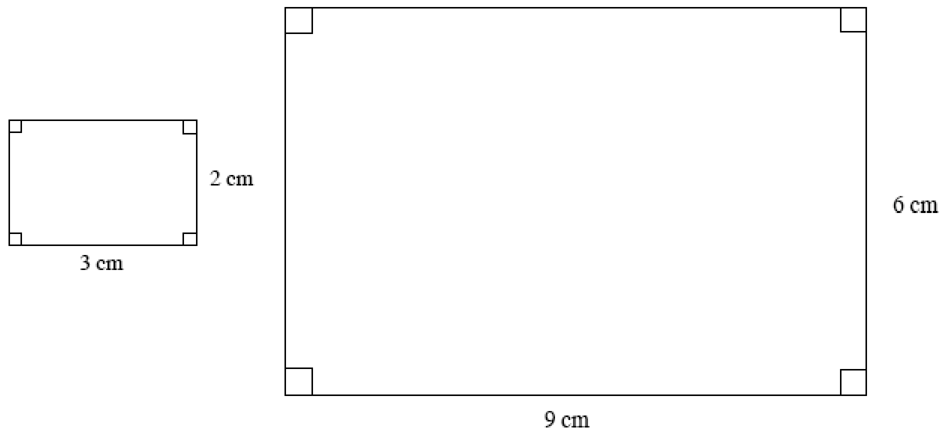
NOME .... DATA .... CLASSE ....

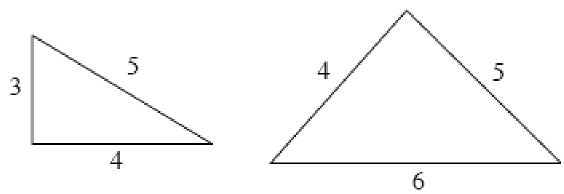
SIMILITUDINE

Le figure simili hanno la stessa forma ma possono avere i lati di lunghezza diversa. I rettangoli della figura seguente sono simili, hanno la stessa forma ma uno è molto più piccolo dell'altro.

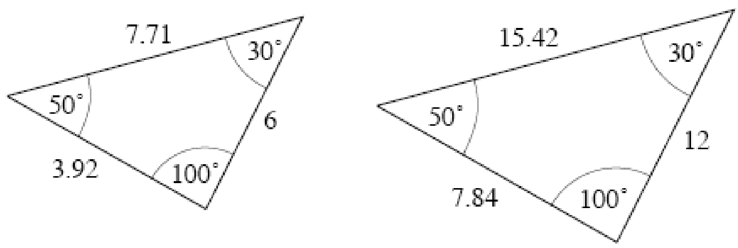


Le figure sono simili perché sono entrambi rettangoli e i lati del maggiore sono il triplo dei lati del minore.
È interessante confrontare l'area dei due rettangoli. L'area del più piccolo è $6cm^2$ e l'area del maggiore è $54cm^2$, ovvero nove (3^2) volte l'area del minore.

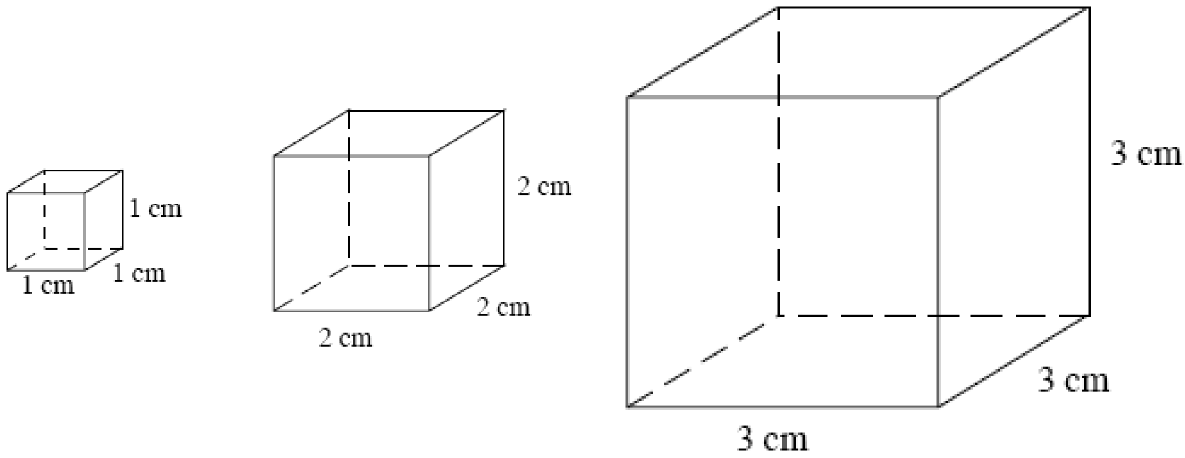
OSSERVAZIONE - In generale, se la lunghezza del lato di una figura viene aumentato di un fattore k, allora l'area aumenta del fattore k^2.
I triangoli seguenti *non* sono simili.



Le lunghezze dei lati nei due triangoli non hanno gli stessi rapporti. Affinché due triangoli siano simili devono avere gli angoli interni congruenti, come rappresentato nella figura seguente:



I tre cubi rappresentati sotto sono simili:



lato	area	superficie	volume
$1cm$	$1cm^2$	$6cm^2$	$1cm^3$
$2cm$	$4cm^2$	$24cm^2$	$8cm^3$
$3cm$	$9cm^2$	$54cm^2$	$27cm^3$

La tabella riporta le misure dei lati, delle aree delle facce, delle superfici e dei volumi dei tre cubi. Confrontando i cubi più grandi con il cubo di lato $1cm$, si osserva:

Per il cubo di lato $2cm$

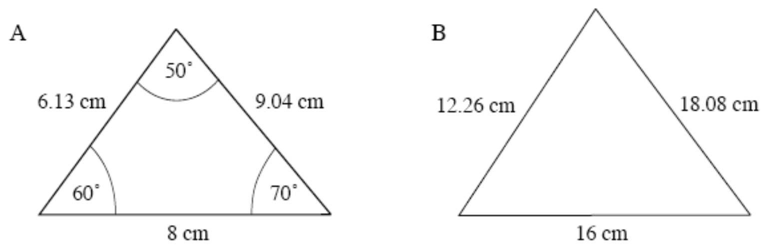
le lunghezze sono	2	volte più grandi
le aree sono	$4 = 2^2$	volte più grandi
il volume è	$8 = 2^3$	volte più grande

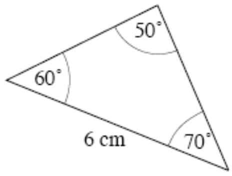
Per il cubo di lato $3cm$

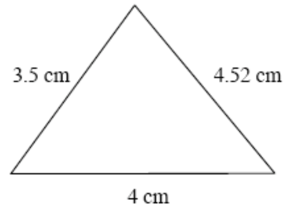
le lunghezze sono	3	volte più grandi
le aree sono	$9 = 3^2$	volte più grandi
il volume è	$27 = 3^3$	volte più grande

OSSERVAZIONE - Se le lunghezze di un solido vengono aumentate di un fattore k, le superfici aumentano del fattore k^2 e il volume del fattore k^3.

ESEMPIO 1: (a) Quali tra i seguenti triangoli sono simili?







(b) Qual è la relazione che lega le aree dei triangoli simili?

SOLUZIONE:

(a) Prima si confrontano i triangoli A e B.
Poiché tutti i lati di B hanno lunghezza doppia dei lati di A, i triangoli sono simili.

Poi si confrontano i triangoli A e C.
Poiché tutti gli angoli sono congruenti, i triangoli sono simili.

Infine si confrontano i triangolo A e D.
Si può osservare che $4 = \frac{1}{2} \times 8$ e $4,52 = \frac{1}{2} \times 9,04$ ma $3,5 \neq \frac{1}{2} \times 6,13$. Perciò i triangoli *non* sono simili.

(b) Poiché i lati di B sono il doppio dei lati di A allora l'area sarà $2^2 = 4$ volte più grande.

Le lunghezze dei lati di C sono $\frac{3}{4}$ della lunghezza dei lati di A, perciò l'area sarà $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ dell'area del triangolo A.

Il rapporto tra le aree dei triangoli $C : A : B$ si può scrivere:

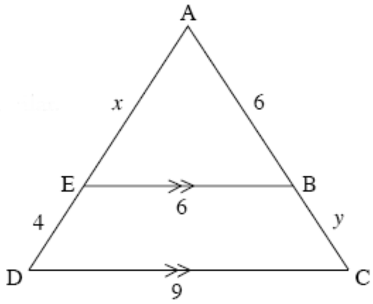
$\frac{9}{16} : 1 : 4$ ovvero $9 : 16 : 64$

ESEMPIO 2:

(a) Dimostrare che i triangoli ABE e ACD sono simili.

(b) Trovare le lunghezze di x e y.

(c) Trovare il rapporto delle aree di ABE e $BCDE$.



SOLUZIONE:

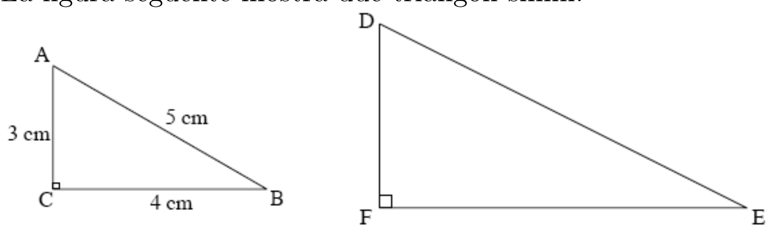
(a) Poiché le rette BE e CD sono parallele si ha $\widehat{ABE} \cong \widehat{ACD}$ e $\widehat{AEB} \cong \widehat{ADC}$. L'angolo $\hat{A}$ è comune ai due triangoli che risultano simili avendo tutti gli angoli congruenti.

(b) Confrontando i lati BE e CD, le lunghezze del triangolo più grande sono $1,5$ volte quelle del più piccolo ovvero il rapporto delle loro lunghezze è $2 : 3$.

Così AC sarà $1,5$ volte maggiore di AB ovvero $AC = 1,5 \times 6 = 9$.
Dunque $y = AC - AB = 3$.
Analogamente risulta $AD = 1,5 \times AE$. Perciò è vale l'equazione $4 + x = 1,5x$ che dà come soluzione $x = 8$.

(c) Poiché le lunghezze nel triangolo più grande aumentano del fattore $1,5$ ovvero $\frac{3}{2}$, allora le aree aumenteranno del fattore $1,5^2$ ossia $\left(\frac{3}{2}\right)^2$.
I rapporti tra le aree dei triangoli si possono scrivere nella forma $1 : 2,25$ oppure $1 : \frac{9}{4}$ oppure $4 : 9$.
Se l'area del triangolo ABE è $4k$ allora l'area del triangolo ACD è $9k$ e dunque l'area del quadrilatero $BCDE$ è $5k$.
Il rapporto delle aree di ABE e $BCDE$ è pertanto $4 : 5$.

ESEMPIO 3: La figura seguente mostra due triangoli simili:



Sapendo che l'area del triangolo DEF è $26,46 cm^2$, calcolare le lunghezze dei suoi lati.

SOLUZIONE: Se le lunghezze dei lati del triangolo DEF sono più grandi di un fattore k rispetto alle lunghezze dei lati del triangolo ABC, allora la sua area sarà più grande di un fattore k^2 rispetto all'area di ABC.

$$\begin{aligned}
\text{Area di } ABC &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \\
&= 6cm^2 \\
\text{perciò } 6 \times k^2 &= 26,46 \\
k^2 &= 4,41 \\
k &= \sqrt{4,41} \\
&= 2,1
\end{aligned}$$

Le lunghezze dei lati del triangolo DEF sono $2,1$ volte più grandi di quelle dei lati del triangolo ABC.

$$\begin{aligned}
DE &= 2,1 \times 5 \\
&= 10,5cm \\
DF &= 2,1 \times 3 \\
&= 6,3cm \\
EF &= 2,1 \times 4 \\
&= 8,2cm
\end{aligned}$$

ESEMPIO 4: Un contenitore è alto $10cm$ e ha volume di $200cm^3$. Un altro contenitore simile al primo ha altezza $12cm$.

(a) Calcolare il volume del secondo contenitore.

(b) Trovare l'altezza di un terzo contenitore simile ai precedenti che abbia volume $675cm^3$.

SOLUZIONE:

(a) Poiché le lunghezze sono aumentate del fattore $1,2$ allora il volume aumenta del fattore $1,2^3$.

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= 200 \times 1,2^3 \\
&= 3,456cm^3
\end{aligned}$$

(b) Le lunghezze aumentano del fattore k allora il volume aumenta del fattore k^3.

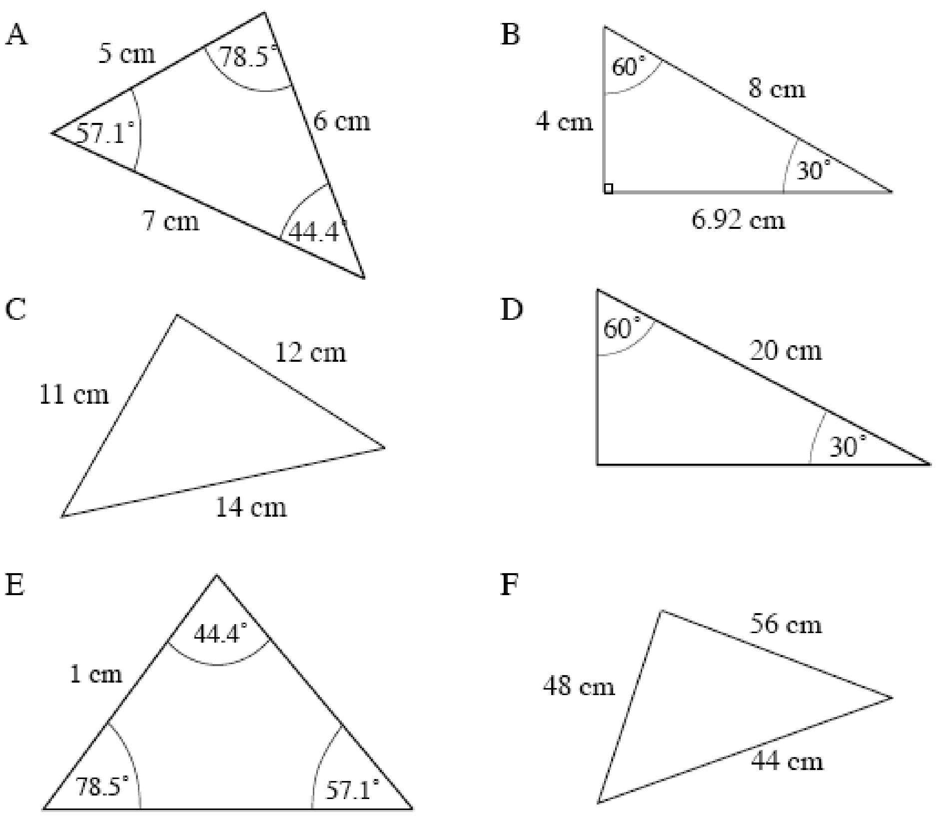
$$\begin{aligned} 675 &= 200 \times k^3 \\ k^3 &= 3,375 \\ k &= \sqrt[3]{3,375} \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

L'altezza deve perciò aumentare secondo un fattore di $1,5$.

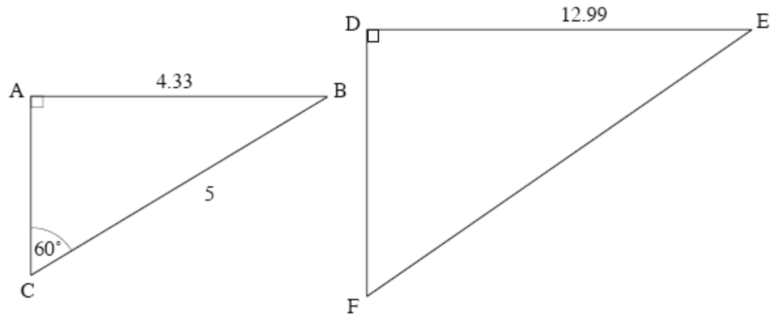
$$\begin{aligned} \text{altezza} &= 1,5 \times 10 \\ &= 15cm \end{aligned}$$

ESERCIZI

1. Quali dei seguenti triangoli sono simili?

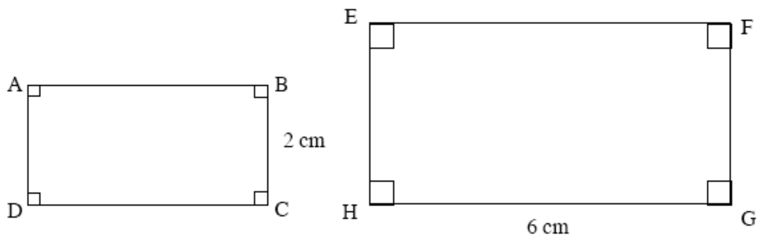


2. La figura seguente rappresenta due triangoli simili:



   (a) Calcolare gli angoli e i lati dei due triangoli.
   (b) Qual è il rapporto delle loro aree?

3. La figura seguente rappresenta due rettangoli simili $ABCD$ e $EFGH$.

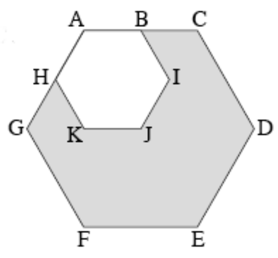


   Calcolare le lunghezze di AB e EH se il rapporto dell'area di $ABCD$ e dell'area di $EFGH$ è:

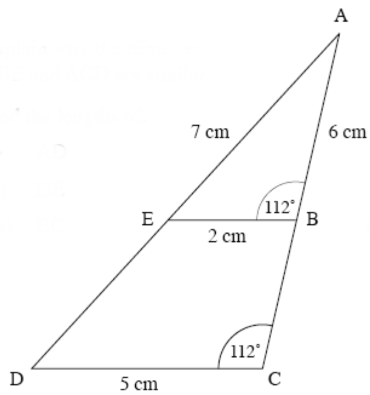
   (a) 1 : 4   (b) 4 : 9

4. La figura a fianco mostra due esagoni regolari con $AB \cong BC$.

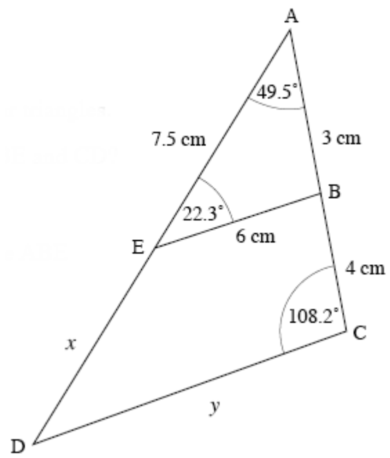
   (a) Qual è il rapporto delle aree tra l'esagono più piccolo e il più grande?
   (b) Qual è il rapporto delle aree tra l'esagono più piccolo e la parte colorata?



5.
   (a) Spiegare perché i triangoli ABE e ACD sono simili.
   (b) Calcolare le lunghezze di
      - AD
      - DE
      - BC
   (c) Calcolare i rapporti delle areee di:
      - ABE su ACD
      - ABE su $BCDE$



6.
   (a) Spiegare perché i triangoli ABE e ACD sono simili.
   (b) Cosa si può dedurre riguardo ai segmenti BE e CD?
   (c) Calcolare le lunghezze di x e y.
   (d) Calcolare il rapporto delle aree del triangolo ABE e del quadrilatero $BCDE$.

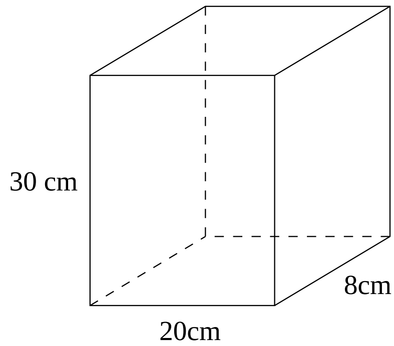


7. Una bottiglia è alta $8cm$ e ha un volume di $30cm^3$. Calcolare il volume di una bottiglia simile alla precedente e avente altezza:

   (a) $12cm$ (b) $10cm$ (c) $20cm$

8. Una scatola ha un volume di $50cm^3$ e la larghezza di $6cm$. Una scatola simile ha larghezza $12cm$.
   (a) Calcolare il volume della scatola più grande
   (b) Quante volte è maggiore l'area della superficie della più grande rispetto alla più piccola?

9. Un pacchetto ha le dimensioni come nella figura.
Tutte le dimensioni vengono aumentate del 20%.



   (a) Calcolare la crescita percentuale di:

      (i) superficie   (ii) volume

   (b) Calcolare la percentuale di crescita delle dimensioni affinché il volume cresca del 50%.

10. Due recipienti simili hanno volumi $400cm^3$ e $1350cm^3$.

   (a) Calcolare il rapporto delle loro altezze

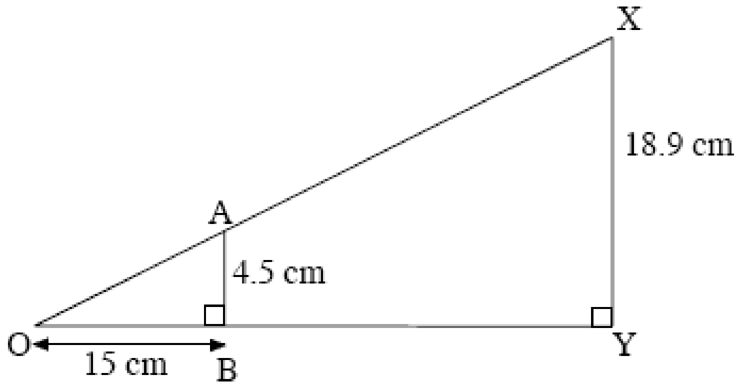
   (b) Calcolare il rapporto tra le aree delle loro superfici.

11. Una scatola di altezza $4cm$ e superficie $96cm^2$ è simile a un'altra scatola che ha volume $1728cm^3$ e superficie $864cm^2$. Calcolare:

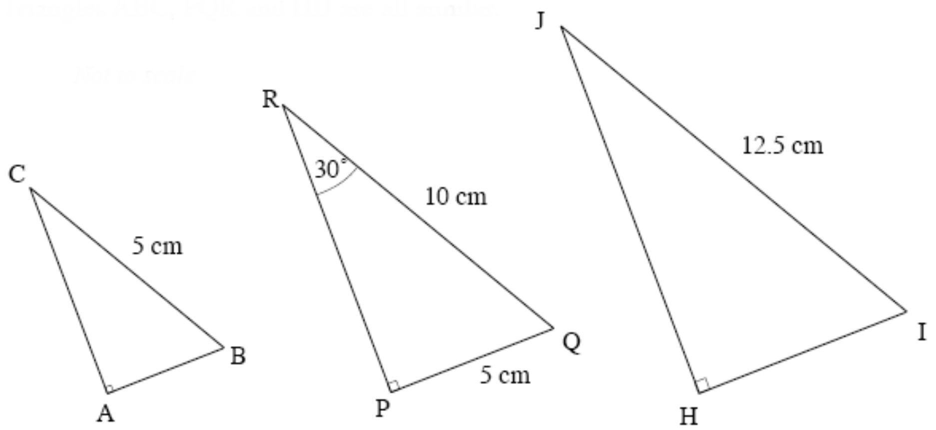
   (a) l'altezza della scatola più grande

   (b) il volume della scatola più piccola

12. In relazione alla seguente figura calcolare la lunghezza di OY.

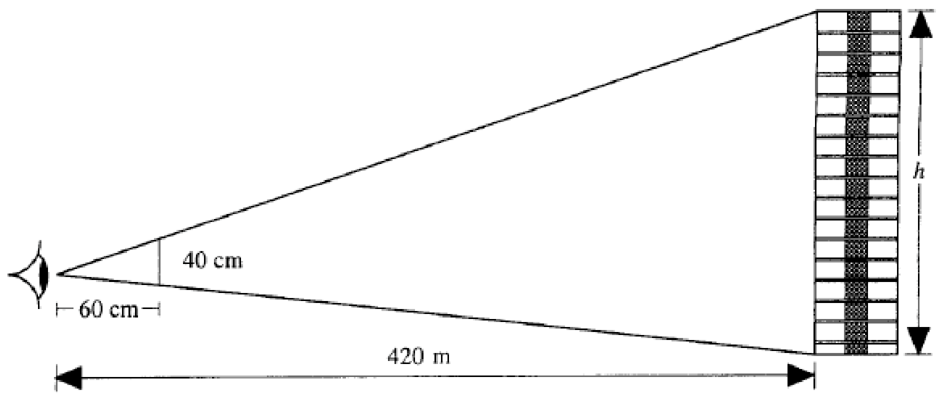


13. I triangoli ABC, PQR e HIJ sono tutti simili:



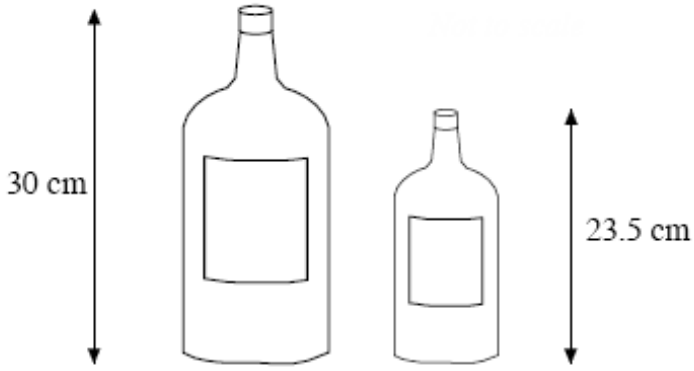
   (a) Calcolare la lunghezza di AB
   (b) Calcolare l'ampiezza dell'angolo $\hat{B}$
   (c) Calcolare la lunghezza di HJ

14. La figura



   rappresenta un pezzo di legno di lunghezza $40cm$ che oscura perfettamente la vista di un grattacielo di Singapore essendo posto tra l'osservatore e l'edificio. Utilizzare la similitudine dei triangoli per calcolare l'altezza dell'edificio sapendo che la distanza del legno dall'osservatore è $60cm$ mentre la distanza del grattacielo dall'osservatore è $420m$.

15. Due bottiglie di vino hanno la stessa forma, la maggiore è lunga $30cm$ e la minore $23,5cm$.

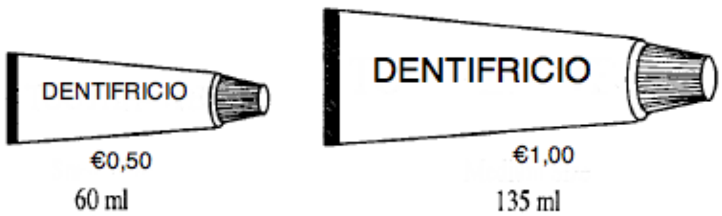


(a) Calcolare il rapporto delle aree delle basi delle due bottiglie

(b) Calcolare il rapporto dei volumi delle due bottiglie

(c) Si può affermare che la più piccola è mezza bottiglia?

16. Nella seguente figura è riportato il prezzo e la dimensione di listino della pasta dentifricia:



Un supermercato ha applicato delle offerte speciali a tali prodotti.

(a) La confezione piccola è venduta allo stesso prezzo con un 20% in più di prodotto. Quant'è il contenuto del tubetto in ml?

(b) La confezione grande viene venduta a €0,90 per $135ml$. Quant'è lo sconto in percentuale?

(c) Calcolare il prezzo per ml di ciascuna di queste offerte e stabilire qual è il prezzo migliore.