NOME .... DATA .... CLASSE

EQUAZIONI DI RETTE PERPENDICOLARI

In questa scheda esamineremo la relazione tra i coefficienti angolari di rette e segmenti perpendicolari.
ESEMPIO 1 -

(a) Tracciare il segmento di estremi $A(1,2)$ e $B(4,11)$ e calcolare il coefficiente angolare.

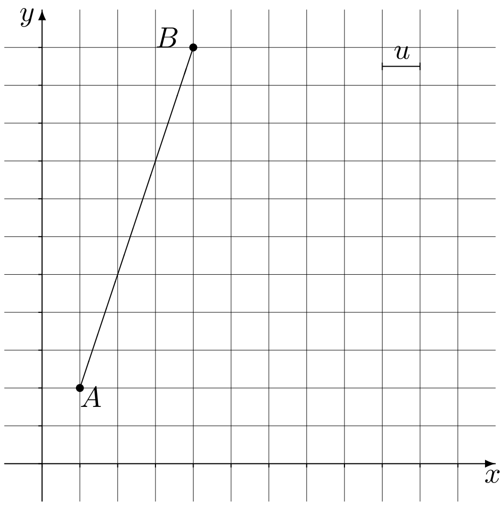
(b) Nello stesso riferimento cartesiano tracciare il segmento di estremi $P(5,4)$ e $Q(8,3)$ e calcolare m_{PQ}.

(c) Verificare che l'angolo formato dalle rette AB e PQ è retto.

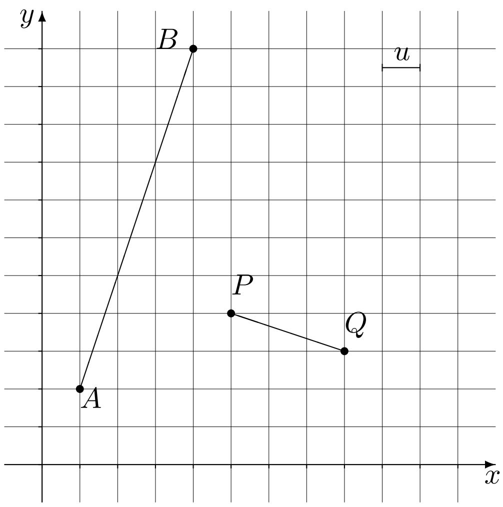
SOLUZIONE:

(a) I punti sono rappresentati nel diagramma a fianco.

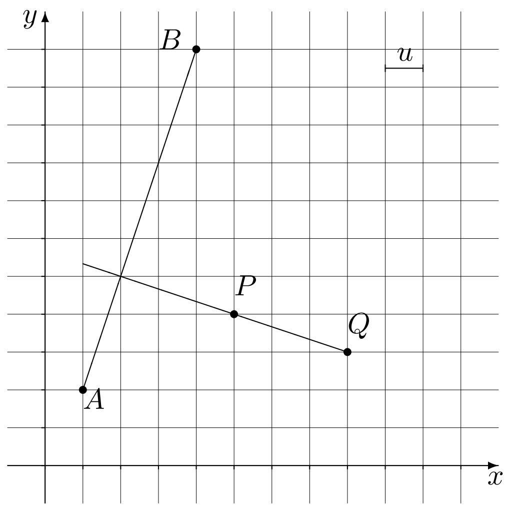
$m_{AB} = \frac{11-2}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$



(b) I punti P e Q sono stati aggiunti nel diagramma a fianco.
$m_{PQ} = \frac{3-4}{8-5} = \frac{-1}{3}$



(c) Si prolunga il segmento PQ per verificare che $AB \perp PQ$.
Il prodotto dei coefficienti angolari di AB e PQ è:
$m_{AB} \times m_{PQ} = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$



OSSERVAZIONE:

(1) Il prodotto dei coefficienti angolari di due rette perpendicolari è -1 ad eccezione delle rette verticali e orizzontali.

(2) Se una retta ha coefficiente angolare m, con $m \neq 0$, la sua perpendicolare ha coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$.

ESEMPIO 2 - Dimostrare che il segmento che congiunge i punti $A(3,2)$ e $B(5,7)$ è perpendicolare al segmento che congiunge $P(2,5)$ e $Q(7,3)$.

SOLUZIONE:

$m_{AB} = \frac{7-2}{5-3} = \frac{5}{2}$

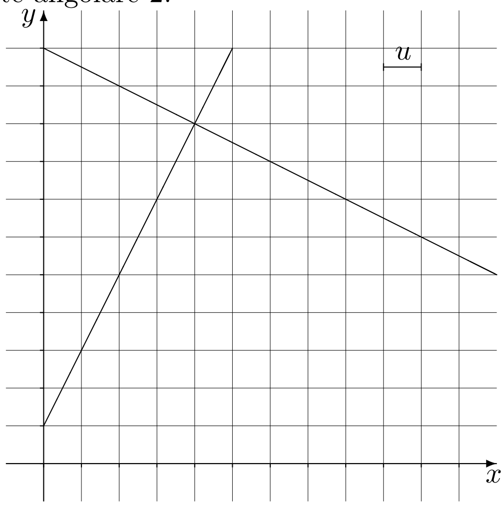
$m_{PQ} = \frac{3-5}{7-2} = \frac{-2}{5}$

$m_{AB} \times m_{PQ} = \frac{5}{2} \times \frac{-2}{5} = -\frac{10}{10} = -1$

perciò le rette AB e PQ sono perpendicolari.

ESEMPIO 3 - Il punto di coordinate $(4, 9)$ giace sulla retta di equazione $y = 2x + 1$. Determinare l'equazione della perpendicolare che passa per tale punto.

SOLUZIONE: La retta $y = 2x + 1$ ha coefficiente angolare 2.



La perpendicolare ha coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$ e la sua equazione è della forma $y = -\frac{1}{2}x + c$.

Poiché la retta passa per il punto $(4, 9)$, si possono usare le coordinate $x = 4$ e $y = 9$ per determinare il valore di c:

$$9 = -\frac{1}{2} \times 4 + c$$

dunque $c = 11$ e l'equazione della perpendicolare è $y = -\frac{1}{2}x + 11$.

ESEMPIO 4 - Determinare l'equazione dell'asse del segmento AB, con $A(4, 8)$ e $B(0, 2)$.

SOLUZIONE: Il coefficiente angolare del segmento AB è $m_{AB} = \frac{8-2}{4-0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ perciò il coefficiente angolare dell'asse di AB è $-\frac{2}{3}$.

Il punto medio di AB ha come coordinate le medie aritmetiche delle coordinate di A e B ovvero $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Sostituendo le coordinate di A e B si ottiene il punto medio di AB:

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (2, 5)$$

L'equazione dell'asse di AB è della forma $y = -\frac{2}{3}x + c$ e, dovendo passare per il punto $(2, 5)$, si possono utilizzare i valori $x = 2$ e $y = 5$ per calcolare c

$$5 = -\frac{2}{3} \times 2 + c$$

risulta $c = \frac{19}{3}$ perciò l'equazione dell'asse di AB è $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$

ESERCIZI

1. Dimostrare che il triangolo di vertici $A(3, 1)$, $B(7, 5)$ e $C(1, 3)$ è rettangolo.
2. Dimostrare che il triangolo di vertici $A(4, 7)$, $B(8, 2)$ e $C(7, 3)$ *non* è rettangolo.
3. I punti $A(3, 2)$, $B(6, 0)$, $C(5, 4)$ e $D(2, 6)$ sono i vertici di un quadrilatero. Dimostrare che è un parallelogramma ma non un rettangolo.

4. Le rette AB e CD sono perpendicolari. Le coordinate dei punti sono: $A(3,2)$, $B(7,4)$, $C(3,7)$ e $D(6,q)$. Determinare il valore di q.

5. Determinare l'equazione della perpendicolare alle seguenti rette, passante per il punto le cui coordinate sono riportate a fianco:

   a. retta $y = 2x$, punto $(4,8)$
   b. retta $y = 4x - 8$, punto origine
   c. retta $y = x$ punto $(4,-7)$
   d. retta $y = 8 - \frac{1}{2}x$, punto $(2,-4)$

6. Determinare l'equazione dell'asse dei seguenti segmenti:

   a. $A(2,6)$, $B(3,7)$
   b. $A(3,2)$, $B(-6,-4)$
   c. $A(-2,-7)$, $B(-1,-9)$
   d. $A(4,-6)$, $B(-3,8)$

7. Un rettangolo ha i vertici nei punti di coordinate $(0,-4)$, $(-4,4)$, $(0,6)$ e $(4,-2)$. Determinare le equazioni dei due assi di simmetria del rettangolo e le coordinate del loro punto d'intersezione.

8. Un parallelogramma ha i vertici nei punti $A(2,0)$, $B(6,4)$, $C(1,3)$ e $D(-3,-1)$. Determinare l'equazione dell'asse di ciascun lato.

9. Data la retta di equazione $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ determinare:

   a. l'equazione della perpendicolare passante per il punto $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$;
   b. le coordinate del piede H della perpendicolare sulla retta data;
   c. la misura della distanza PH.

10. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(-2,1)$, $B\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ e $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.